Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica
Cuatrimestral | Facultad de Humanidades, Campus VI | ISSN: 2594-1755
Año VII| Número 20 | Enero-Abril 2024

ARTÍCULO

Árboles semánticos para la lógica de términos libre

Free Term Logic Tableaux

J.-Martín Castro-Manzano
UPAEP Universidad
Correo electrónico: josemartin.castro@upaep.mx
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2227-921X

Resumen

Asumiendo que la Lógica de Términos y Funtores se comporta como una lógica libre, en esta contribución modificamos su método de prueba arborescente para acomodar inferencias (in)válidas típicas de una lógica libre.

Palabras Clave: Lógica de términos, lógica libre, árboles semánticos

Abstract

Assuming that Term Functor Logic behaves as a free logic, in this contribution we modify its tableaux proof method in order to accommodate typical (in)valid inferences of free logic.

Keywords: *Term logic, free logic, semantic tableaux*

Introducción

Por un lado, solemos decir que una lógica es libre cuando está libre de supuestos ontológicos con respecto a ciertos ítems singulares. Así es como se entiende la propuesta de Lambert de finales de los años cincuenta (Lambert, 1958; 1960; 1963), y por eso decimos que la lógica libre es una "desviación" de la lógica clásica de primer orden que resulta de la adición de ítems singulares inexistentes (cf. Palau, 2002, p. 36). Por otro lado, también a finales de la década de 1950, Sommers reconsideró las virtudes de la sintaxis de la lógica de términos aristotélica. Esta revisión produjo una teoría lógica, conocida como Lógica de Términos y Funtores (Sommers, 1982; Englebretsen, 1996), que utiliza términos y funtores en lugar de elementos de la lógica clásica de primer orden como variables o cuantificadores.

Aunque ambas lógicas se crearon más o menos en el mismo período de tiempo, son bastante distintas y normalmente no están relacionadas; sin embargo, creemos que comparten algunas similitudes interesantes que vale la pena destacar. Así, en (Castro-Manzano, 2020) argumentamos a favor de que la Lógica de Términos y Funtores se comporta como una lógica libre. Ahora, en esta contribución asumimos dicho resultado para modificar su método de prueba de arborescente y con ello acomodar inferencias (in)válidas típicas de lógica libre.

Para alcanzar este objetivo procedemos de la siguiente manera: primero hacemos una presentación elemental de la lógica libre y la lógica de Términos y Funtores, después explicamos en qué sentido esta última puede considerarse una lógica libre y, al final, modificamos su método de prueba arborescente. Si nuestras ideas resultan ser correctas, proporcionarían evidencia adicional para considerar a la lógica de Términos y Funtores como una lógica de impronta tradicional que no es clásica (cf. Englebretsen, 1996; Woods, 2014).

Preliminares

Lógica Libre

Dado que la lógica libre es una modificación de la lógica clásica de primer orden (LPO) es conveniente comenzar con una breve caracterización de LPO mostrando su lenguaje y su base deductiva. A grandes rasgos, el vocabulario de LPO está definido por cuatro conjuntos: el de variables individuales, $VAR=\{x_0, x_1, x_2, ...\}$; el de constantes individuales, $CONS=\{c_0, c_1, c_2, ...\}$; el de relaciones n-arias, $REL=\{R_0{}^n, R_1{}^n, R_2{}^n, ...\}$; y el de constantes lógicas, $LCONS=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv, \forall, \exists\}$. Dado este vocabulario, una constante o una variable define un término t. Si t_1, ..., t_n son términos y $R_0{}^n$ es una relación n-aria, entonces $R_0{}^n t_1 ... t_n$ es una fórmula atómica. Si A y B son fórmulas atómicas, entonces A, B, $\neg A$, $\neg B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ y $A \equiv B$ son fórmulas bien formadas. Y si A es una fórmula y x es una variable, entonces $\forall xA$ y $\exists xA$ también son fórmulas bien formadas.

Una interpretación en esta lógica se define por un par $<D, v>$ tal que $D \neq \emptyset$ es un dominio y v es una función que asigna elementos del lenguaje al dominio. Así, si c es una constante, $v(c) \in D$; si $R_0{}^n$ es una relación n-aria, entonces $v(R_0{}^n) \subseteq D^n$; las constantes lógicas se definen como de costumbre, pero en particular $v(\forall xA)=1$ si y sólo si para todo $d \in D$, $v(A[x/c_d])=1$, y 0 en caso contrario; y $v(\exists xA)=1$ si y sólo si para algún $d \in D$, $v(A[x/c_d])=1$ y 0 en caso contrario, siendo 1 y 0 el valor designado y antidesignado, respectivamente.

Ahora bien, normalmente una lógica libre es una lógica de primer orden que no asume ciertos principios de LPO y, por lo tanto, el vocabulario y la sintaxis de la lógica libre (LPOL) son los mismos que los de LPO; sin embargo, LPOL se reserva un predicado de existencia especial (que puede leerse como "*t* existe") que se especifica de la siguiente manera:

$$\mathrm{E}!t =_{\mathrm{df}} \exists x.x=t$$

Una interpretación en LPOL se define por una tripleta $<D, D^*, v^*>$ tal que $D \neq \emptyset$, $D^* \subseteq D$ es posiblemente vacío, y v^* es una función que se comporta como v en LPO pero hace que $v^*(\mathrm{E})=D^*$. Esto significa que D es el dominio de todos los ítems pero D^* es un subconjunto especial de todos los ítems que existen, de modo que E!*t* es verdadero si *t* denota un miembro de D^* pero es falso si no lo hace.

Así, se puede decir, por ejemplo, que D contiene ítems singulares como Guillermo de Baskerville (digamos g_1) y Guillermo de Occam (digamos g_2), pero mientras $g_2 \in D$ y $g_2 \in D^*$, $g_1 \in D$ pero $g_1 \notin D^*$. Por lo tanto, como es de esperarse, las condiciones de verdad para una lógica como esta son similares a las de LPO pero con ciertas variaciones, a saber: $v(\forall xA)=1$ si y sólo si para todo $d \in D^*$, $v(A[x/c_d])=1$, y 0 en caso contrario; y $v(\exists xA) = 1$ si y sólo si para algún $d \in D^*$, $v(A[x/c_d])=1$, y 0 en caso contrario.

Como consecuencia, LPOL permite el uso de ítems singulares inexistentes al rechazar aquellas reglas de inferencia cuya validez depende del supuesto de que dichos ítems denotan miembros del dominio, es decir, la regla de eliminación del cuantificador universal (E∀) y la regla de introducción del cuantificador particular (I∃). Para ilustrar este punto, echemos un vistazo a la regla E∀ en LPO:

$$\mathrm{E}\forall_{\mathrm{LPO}}\ \frac{\forall x A x}{A[t/x]}$$

Claramente, esta regla es válida en LPO, ya que el dominio de interpretación no es vacío, pero no puede ser válida en LPOL, ya que incluso si cada ítem singular en el dominio satisface A, si sucede que t no denota un miembro del dominio, entonces la conclusión $A[t/x]$ puede ser falsa aunque $\forall x A x$ sea verdadera. Por ejemplo, supongamos que Ax representa "x es el hijo de una persona" y t representa a "Bartleby" (el escribano).

Algo similar ocurre con la regla I∃:

$$\mathrm{I}\exists_{\mathrm{LPO}}\ \frac{At}{\exists x A[t/x]}$$

Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica
Cuatrimestral | Facultad de Humanidades, Campus VI | ISSN: 2594-1755
Año VII| Número 20 | Enero-Abril 2024

Como en el caso anterior, esta regla es válida en LPO pero no lo es en LPOL porque si t no denota un ítem en el dominio de interpretación, entonces la verdad de A no garantiza que haya un elemento en el dominio que satisfaga la expresión $A[t/x]$. Por ejemplo, supongamos que t representa a "Klaatu" y que Ax representa "x pronunció la frase "Klaatu barada nikto"."

En consecuencia, para distinguir los ítems que denotan de los que no, LPOL ofrece versiones debilitadas de E∀ e I∃ de la siguiente manera:

$$\mathrm{E}\forall_{\mathrm{LPOL}} \quad \frac{\forall x A x \quad \mathrm{E}!t}{A[t/x]}$$

$$\mathrm{I}\exists_{\mathrm{FFOL}} \quad \frac{At \quad \mathrm{E}!t}{\exists x A[t/x]}$$

Por supuesto, aunque esta descripción de la lógica libre es sumativa y requiere mayor precisión (cf. Bencivenga, 2002), es suficiente para nuestros propósitos actuales.

Lógica de Términos y Funtores

La silogística asertórica, la lógica central de la lógica aristotélica tradicional, es una lógica de términos que utiliza enunciados categóricos. Un enunciado categórico es un enunciado compuesto por dos términos, una cantidad y una cualidad. Normalmente, decimos que un enunciado categórico es un enunciado de la forma:

<Cantidad> <S> <Cualidad> <P>

donde *Cantidad*={Todo, Algún}, *Cualidad*={es, no es}, y *S* y *P* son términos-esquema, de modo que obtenemos cuatro tipos de enunciados categóricos: el universal afirmativo, el universal negativo, el particular afirmativo y el particular negativo. Los siguientes son ejemplos de enunciados categóricos, en dicho orden:

1. Todo átomo es extenso.
2. Todo átomo no es extenso (i.e. ningún átomo es extenso).
3. Algún átomo es extenso.
4. Algún átomo no es extenso.

Desde el punto de vista de la lógica de Términos y Funtores de Sommers y Englebretsen (TFL), decimos que un enunciado categórico es un enunciado de la forma:

$$\pm S \pm P$$

donde ± es una abreviatura de los functores + y −, y S y P son términos-esquema. Entonces, por ejemplo, podemos modelar los cuatro enunciados categóricos tradicionales en TFL de la siguiente manera, donde el término A significa *átomo* y E significa *extenso*:

1. −A+E
2. −A−E
3. +A+E
4. +A−E

Dado este lenguaje, TFL ofrece una noción de validez para la silogística (Englebretsen, 1996, p.167): un silogismo es válido si y sólo si *i)* la suma algebraica de las premisas es igual a la conclusión, y *ii)* el número de conclusiones particulares (a saber, cero o uno) es igual al número de premisas particulares. Y así, con esta lógica podemos modelar inferencias asertóricas como la que se muestra en el Cuadro 1.

Enunciado	TFL
1. Todo patrimonio es sucesión.	−P+S
2. Todo legado es patrimonio.	−L+P
⊢ Todo legado es sucesión.	−L+S

Cuadro 1. Una inferencia válida

En este ejemplo podemos ver claramente cómo funciona la definición anterior: *i)* si sumamos las premisas obtenemos la expresión algebraica (−P+S)+(−L+P)=−L+S, de modo que la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión; y la conclusión es −L+S, en lugar de +S−L, porque *ii)* el número de conclusiones con cantidad particular (cero en este caso) es igual al número de premisas con cantidad particular (cero en este caso).

Finalmente, antes de continuar, debemos mencionar que este sistema no es sólo capaz de representar inferencias silogísticas, ya que también puede representar enunciados relacionales, singulares y compuestos (Englebretsen, 1987, 1996), pero para nuestros propósitos actuales bastará con esta exposición.

TFL como lógica libre

En (Castro-Manzano, 2020) ofrecimos un argumento a favor de que TFL se comporta como una lógica libre aunque no es una lógica libre. En breve, TFL se comporta como una lógica libre porque se cumplen dos condiciones: *i)* las representaciones en TFL de $E\forall_{LPO}$ e $I\exists_{LPO}$ producen inferencias inválidas en TFL (Cuadro 2), mientras que *ii)* las representaciones en TFL de $E\forall_{LPOL}$ e $I\exists_{LPOL}$ producen inferencias válidas en TFL (Cuadro 3).

⊚ $E\forall_{LPO}\ \dfrac{\forall x Ax}{A[t/x]}$ ⊚ $E\forall_{TFL}\ \dfrac{-X+A}{\pm t+A}$

Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica
Cuatrimestral | Facultad de Humanidades, Campus VI | ISSN: 2594-1755
Año VII| Número 20 | Enero-Abril 2024

ARTÍCULO

◎ $\mathrm{I}\exists_{\mathrm{LPO}}\ \dfrac{At}{\exists x A[t/x]}$ ◎ $\mathrm{I}\exists_{\mathrm{TFL}}\ \dfrac{\pm t{+}A}{+X{+}A}$

Cuadro 2. Reglas en LPO y TFL

◎ $\mathrm{E}\forall_{\mathrm{LPOL}}\ \dfrac{\forall x Ax \quad \mathrm{E}!t}{A[t/x]}$ ◎ $\mathrm{E}\forall_{\mathrm{TFL}}\ \dfrac{-X{+}A \quad \pm t{+}X}{\pm t{+}A}$

◎ $\mathrm{I}\exists_{\mathrm{LPOL}}\ \dfrac{At \quad \mathrm{E}!t}{\exists x A[t/x]}$ ◎ $\mathrm{I}\exists_{\mathrm{TFL}}\ \dfrac{\pm t{+}A \quad \pm t{+}X}{+X{+}A}$

Cuadro 3. Reglas en LPOL y TFL

Sin embargo, incluso si TFL se comporta como LPOL con respecto a ciertas reglas de inferencia, eso no significa que TFL sea una lógica libre *stricto sensu*. Una razón por la cual TFL no puede ser una lógica libre en sentido pleno tiene que ver con cuestiones de origen: una lógica libre es, por excelencia, un sistema de primer (tal vez de segundo) orden y TFL, como hemos visto, no es un sistema de primer orden, sino una lógica de términos. Por supuesto, podríamos ampliar nuestra definición de "lógica libre" para incluir lógicas de términos como lógicas libres, pero hacerlo sería impreciso en este punto, considerando que existe literatura establecida sobre lógicas libres y que las lógicas de términos tienen sus propios supuestos ontológicos (Englebretsen, 1996; 2013; 2017).

Árboles semánticos para la lógica de términos libre

Por lo tanto, afirmar que TFL es un sistema de lógica libre *tout court* es pedir demasiado, ya que no es un sistema de primer orden; pero afirmar que no se comporta como una lógica libre es corto de miras, ya que su comportamiento inferencial es similar al de una lógica libre. Por ello, parece justo concluir que TFL se comporta como una lógica libre aunque no sea una lógica libre (Castro-Manzano, 2020).

Con este resultado en mente, podemos alcanzar nuestro objetivo, esto es, modificar el método de prueba arborescente de TFL para acomodar inferencias típicamente (in)válidas de lógica libre. Así, digamos que un árbol es un grafo acíclico conectado determinado por nodos y vértices. El nodo en la parte superior es la raíz. Los nodos de la parte inferior son las puntas. Cualquier camino desde la raíz hasta una serie de puntas es una rama. Para probar la validez de una inferencia construimos un árbol que comience con una sola rama en cuyos nodos ocurran las premisas y el rechazo de la conclusión: esta es la lista inicial. Posteriormente aplicamos las reglas de expansión que nos permiten ampliar la lista inicial (Figura 1).

Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica
Cuatrimestral | Facultad de Humanidades, Campus VI | ISSN: 2594-1755
Año VII| Número 20 | Enero-Abril 2024

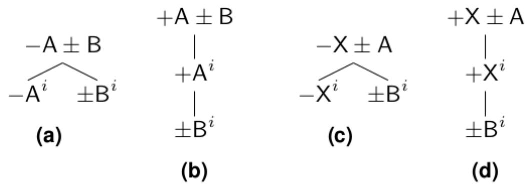


Figura 1. Reglas de expansión

Las Figuras 1a y 1c representan las reglas para enunciados universales, mientras que las Figuras 1b y 1d muestran las reglas para enunciados particulares. Después de aplicar una regla introducimos un índice $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Para los enunciados universales el índice puede ser cualquier número natural; para los particulares, el índice tiene que ser un nuevo natural si aún no tienen un índice. Además, siguiendo los principios de TFL, asumimos las siguientes reglas de rechazo: $-(\pm T)=\mp T$, $-(\pm T \pm T)=\mp T \mp T$, y $-(—T—T)=+(-T)+(-T)$. A modo de ejemplo, consideremos un silogismo típico como el que usamos en el Cuadro 1 (Figura 2).

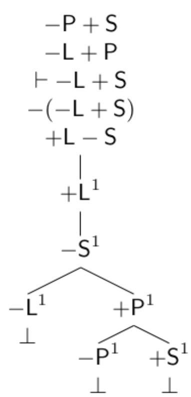


Figura 2. Un ejemplo

Universidad Autónoma de Chiapas
www.miscelaneafilosofica.unach.mx
miscelanea.filosofica@unach.mx
Av. Canarios S/N, Fracc. Buenos Aires
CP. 29050, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

Para describir el proceso que seguimos para desplegar un árbol, consideremos el ejemplo anterior. Las primeras tres líneas son las premisas y la conclusión, y la cuarta línea es el rechazo de la conclusión: todas estas líneas menos la conclusión definen la lista inicial. La quinta línea es el resultado de aplicar una regla de rechazo a la conclusión. Después, el siguiente par de líneas es el resultado de aplicar la regla para un enunciado particular a la quinta línea, eligiendo el índice 1. Después, la primera división resulta de aplicar la regla para un enunciado universal a la segunda línea, eligiendo también el índice 1, ya que queremos que los índices se unifiquen. Esta división produce dos ramas, una de las cuales (la más a la izquierda) incluye los términos $+L^1$ y $-L^1$ en dos de sus nodos y, por tanto, está cerrada; la rama restante aún no está cerrada, por lo que continuamos con el mismo proceso: dividimos la última premisa disponible para obtener, nuevamente, un par de ramas, una de las cuales (la más a la izquierda) incluye los términos $-P^1$ y $+P^1$ en dos de sus nodos y, por tanto, está cerrada; y la otra (la más a la derecha) que contiene los términos $+S^1$ y $-S^1$ en dos de sus nodos y, por tanto, también está cerrada.

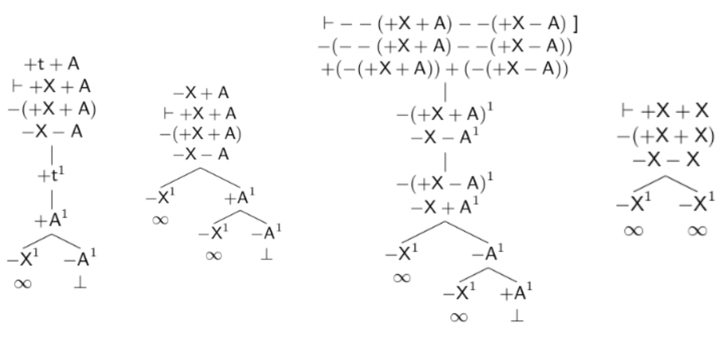
Así pues, como podemos ver, estas reglas se comportan como es de esperarse, pero observemos que estamos haciendo explícita una distinción que puede estar implícita, a saber, la distinción entre términos arbitrarios y términos no-arbitrarios. Las reglas de las Figuras 1a y 1b utilizan términos no-arbitrarios, es decir, términos que no representan variables LPO, sino relaciones (es decir, términos como A, B, C, ...); mientras que las reglas de las Figuras 1c y 1d utilizan términos arbitrarios, es

Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica
Cuatrimestral | Facultad de Humanidades, Campus VI | ISSN: 2594-1755
Año VII| Número 20 | Enero-Abril 2024

decir, términos que no representan relaciones LPO, sino variables (es decir, términos como X, Y, Z, ...).

Con estas nuevas distinciones podemos decir que un árbol está completo si y sólo si se han aplicado todas las reglas que se pueden aplicar; una rama está cerrada si y sólo si hay términos de la forma $\pm T^i$ y $\mp T^i$ en dos de sus nodos; de lo contrario está abierta. Una rama cerrada se indica escribiendo un ⊥ al final de la misma; una rama abierta se indica escribiendo ∞. Un árbol está cerrado si y sólo si todas sus ramas están cerradas; de lo contrario está abierto. Entonces, como es usual, un término ±T es una consecuencia lógica del conjunto de términos Γ (i.e. Γ⊢±T) si y sólo si existe un árbol completo y cerrado cuya lista inicial incluye los términos de Γ y el rechazo de ±T (i.e. Γ∪{∓T}⊢⊥).

Para ilustrar estas modificaciones consideremos algunas inferencias de lógica libre típicamente (in)válidas y observemos cómo la simple distinción entre términos arbitrarios y no- arbitrarios funciona: Figuras 3 y 4, y Cuadro 4.

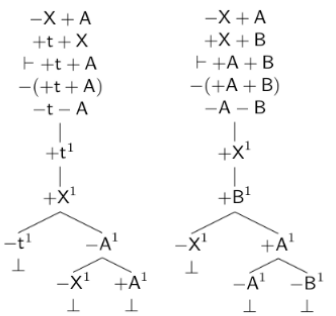


(a) (b) (c) (d)

Figura 3. Algunas inferencias inválidas

Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica
Cuatrimestral | Facultad de Humanidades, Campus VI | ISSN: 2594-1755
Año VII| Número 20 | Enero-Abril 2024

La Figura 3a es la interpretación en TFL de $At\vdash_{\mathrm{LPO}}\exists xAx$ (que no es válida en LPOL). La Figura 3b es $\forall xAx\vdash_{\mathrm{LPO}}\exists xAx$ (que no es válida en LPOL). La Figura 3c es $\vdash_{\mathrm{LPO}}\exists x(Ax\vee\neg Ax)$ (que no es válida en LPOL). Y finalmente, la Figura 3d es la adaptación de $\vdash_{\mathrm{LPO}}\exists x(x=x)$ (que no es válida en LPOL). Por último, consideremos un par de inferencias válidas: la Figura 4a es la regla $E\forall_{\mathrm{LPOL}}$ y la Figura 4b es $\forall xAx$, $\exists xBx\vdash_{\mathrm{LPOL}}\exists x(Ax\wedge Bx)$.



(a) (b)

Figura 4. Algunas inferencias válidas

Inferencia	LPO	LPOL	TFL
$At\vdash\exists xAx$	✓	✕	✕
$\forall xAx\vdash\exists xAx$	✓	✕	✕
$\vdash\exists x(Ax\vee\neg Ax)$	✓	✕	✕

Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica
Cuatrimestral | Facultad de Humanidades, Campus VI | ISSN: 2594-1755
Año VII| Número 20 | Enero-Abril 2024

$\vdash\exists x(x=x)$	✓	✕	✕
$E\forall_{LPO}$	✓	✕	✕
$E\forall_{LPOL}$	✓	✓	✓
$I\exists_{LPOL}$	✓	✓	✓
$\forall xAx,\exists xBx\vdash\exists x(Ax\wedge Bx)$	✓	✓	✓

Cuadro 4. Resumen

Comentarios finales

Asumiendo que la Lógica de Términos y Funtores se comporta como una lógica libre (aunque no sea una lógica libre *prima facie*), en esta contribución hemos modificado su método de prueba arborescente para acomodar inferencias (in)válidas típicas de una lógica libre (haciendo explícita una distinción que puede estar implícita, a saber, la distinción entre términos arbitrarios y no-arbitrarios). Si estas afirmaciones son correctas, entonces esta contribución no sólo señalaría algunas similitudes relevantes entre la lógica libre y la lógica de términos sommersiana que aún no han sido reconocidas, sino que también proporcionaría evidencia adicional para considerar a la Lógica de Términos y Funtores como una lógica de impronta tradicional que no es clásica. Este resultado, aunque sencillo, es interesante en la medida en que promueve la revisión de las lógicas de términos como herramientas que pueden ser más interesantes de lo que podríamos haber creído inicialmente.

Referencias

Bencivenga, E. (2002). "Free logics". En Gabbay, D. M. y Guenthner, F. (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd Edition. Kluwer Academic Publishers, pp. 147–196.

Castro-Manzano, J.M. (2020). "¿Es la lógica de términos una lógica libre?" *Stoa. Revista de Filosofía*, Vol. 11, no. 21, pp. 98–109.

Englebretsen, G. (1987). *The New Syllogistic*. Peter Lang.

Englebretsen, G. (1996). *Something to Reckon with: The Logic of Terms*. University of Ottawa Press.

Englebretsen, G. (2013). *Robust Reality: An Essay in Formal Ontology*. De Gruyter.

Englebretsen, G. (2017). *Bare Facts and Naked Truths: A New Correspondence Theory of Truth*. Taylor & Francis.

Lambert, K. (1958). "Notes on E!", *Philosophical Studies*, Vol. 9, No. 4, pp. 60–63.

Lambert, K. (1960). "The definition of E! in free logic". Abstracts: The International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford University Press Stanford.

Lambert, K. (1963). "Existential import revisited." *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 4, No. 4, pp. 288–292.

Palau, G. (2002). *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Gedisa.

Sommers, F. (1982). *The Logic of Natural Language*. Oxford University Press.

Woods, J. (2014). *Aristotle's Earlier Logic*. Studies in logic. College Publications.